หน่วยที่ 9

ภาคตัดกรวย

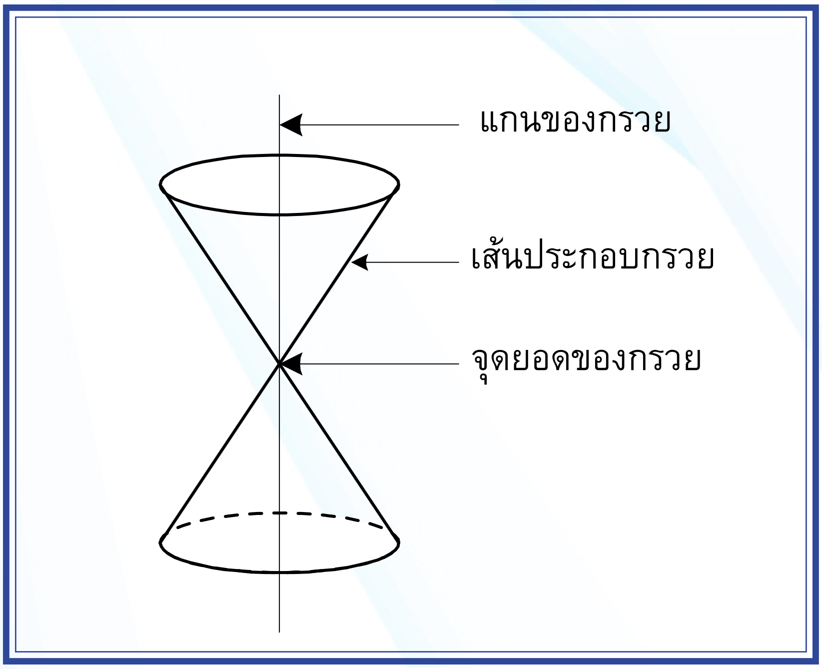
1. วงกลม
2. พาราโบลา
3. วงรี
4. ไฮเพอร์โบลา

สาระการเรียนรู้

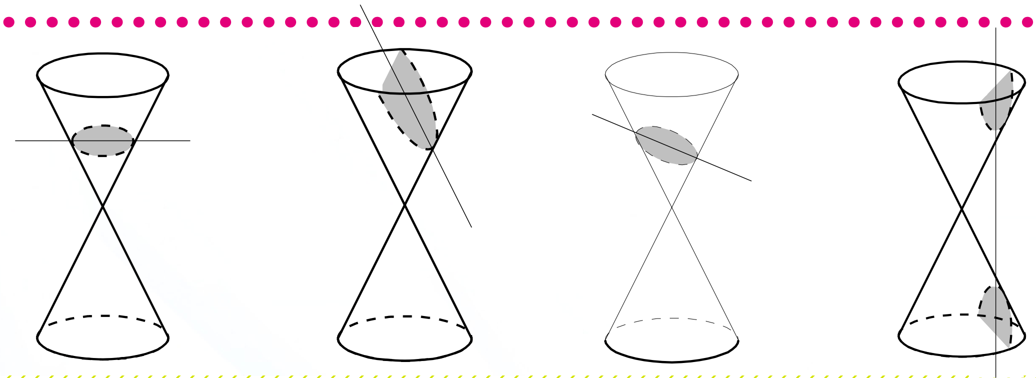
ภาคตัดกรวย (Conic Sections)

ภาคตัดกรวย (Conic Sections) **เป็นการศึกษาเกี่ยวกับกราฟเส้นโค้งในลักษณะต่าง ๆ ได้แก่ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา ซึ่งกราฟเหล่านี้เกิดจากการตัดกรวยกลมคู่ที่มียอดชนกันด้วยระนาบหนึ่ง**

ส่วนประกอบของกรวยกลม (Cone)



เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวยกลมคู่ที่ยอดชนกันด้วยระนาบหนึ่ง มีลักษณะ 4 ลักษณะ ดังนี้



(1) วงกลม (2) พาราโบลา (3) วงรี (4) ไฮเพอร์โบลา

(1.) วงกลม (Circle)	เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบ ในแนวตั้งฉากกับแกนของกรวย
(2.) พาราโบลา (Parabola)	เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบ ในแนวที่ขนานกับเส้นประกอบกรวย
(3.) วงรี (Ellipes)	เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงด้วยระนาบ ในแนวที่ไม่ขนานกับเส้นประกอบกรวย และไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย
(4.) ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)	เกิดจากการตัดกรวยกลมตรงที่ยอดชนกัน ในแนวที่ขนานกับแกนของกรวย

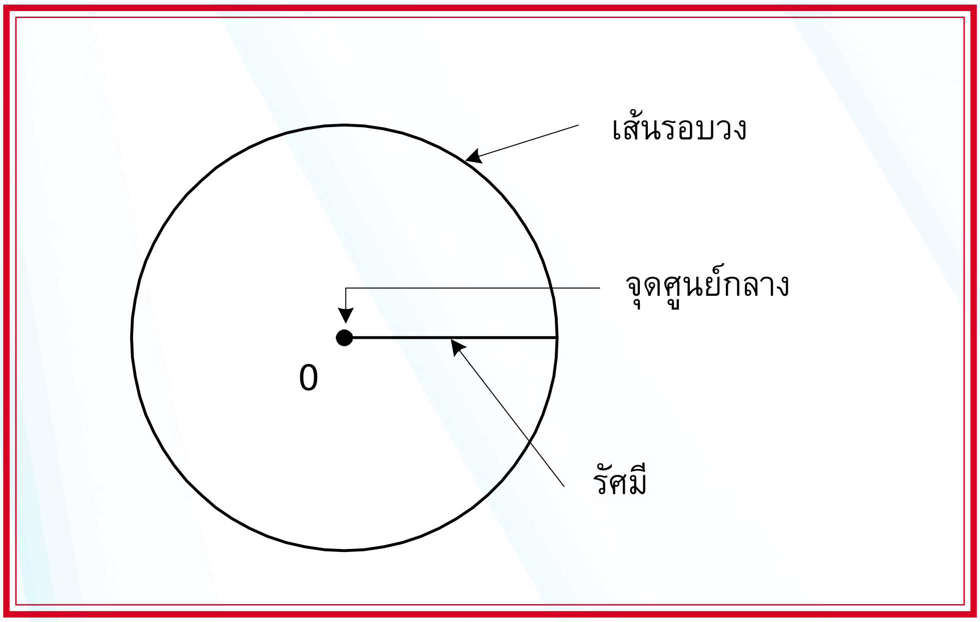
วงกลม (Circle)

นิยามที่ 1

วงกลม (Circle) **คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากจุดตรึง** (Fixed Point) **จุดหนึ่งเป็นระยะที่คงที่**

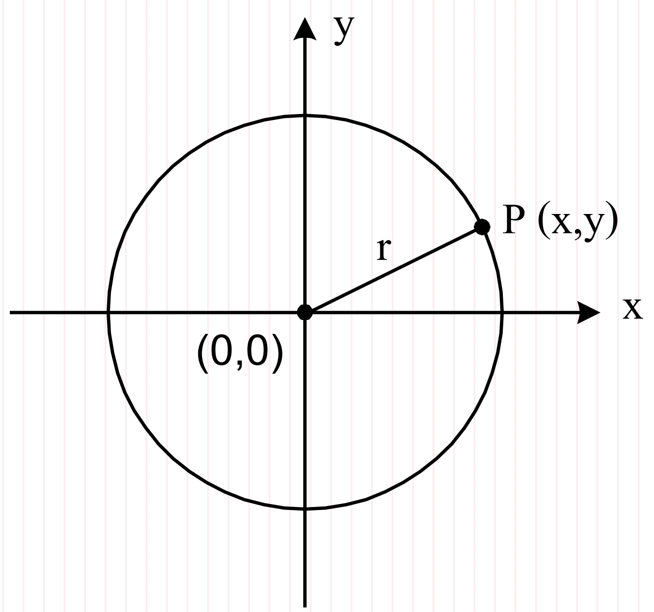
จุดตรึง เรียกว่า จุดศูนย์กลาง ระยะที่คงที่เรียกว่า รัศมี ทางเดินของจุด เรียกว่า เส้นรอบวง

ส่วนประกอบของวงกลม มีดังนี้



วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0,0)

วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และมีรัศมี r หน่วย ดังรูป

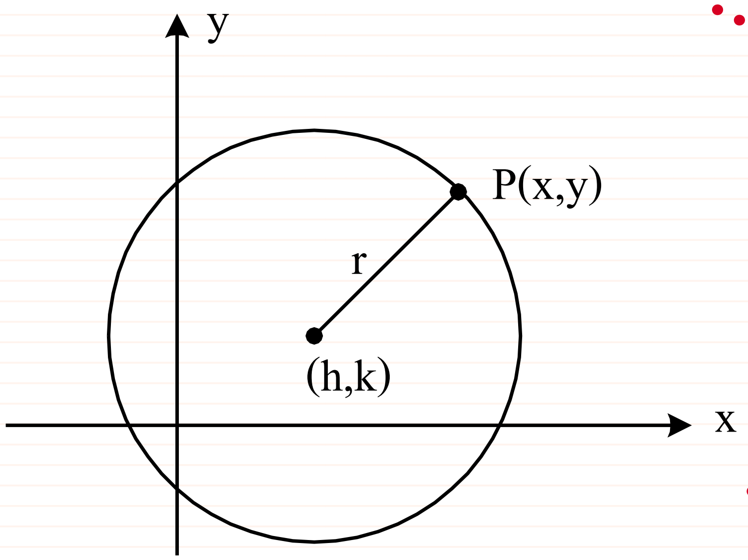


สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และมีรัศมี r หน่วย คือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และ มีรัศมี r หน่วย ดังรูป



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

สมการรูปทั่วไปของวงกลม

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

การหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม

1. โดยจัดสมการให้อยู่ในแบบสมการรูปมาตรฐานของวงกลม คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (h , k) รัศมี คือ r

2. โดยจัดสมการให้อยู่ในแบบสมการรูปทั่วไปของวงกลม คือ

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

แล้วจะได้ $D = -2h, \quad h = -\frac{D}{2}$

$$E = -2k, \quad k = -\frac{E}{2}$$

$$F = h^2+k^2- r^2, \quad r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$$

$$= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

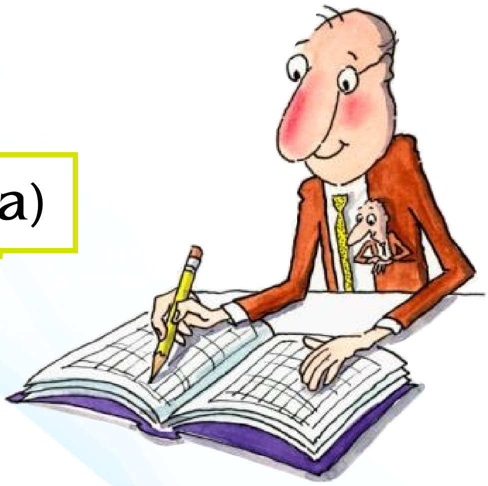
ดังนั้น จุดศูนย์กลาง คือ (h, k) หรือ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

รัศมี คือ $r = \sqrt{h^2 + k^2 - F} = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

เส้นสัมผัสวงกลม

นิยามที่ 2

เส้นสัมผัสวงกลม หมายถึง เส้นตรงที่ลากผ่าน (ตัด) วงกลมเพียงจุดเดียว



พาราโบลา (Parabola)

นิยามที่ 3

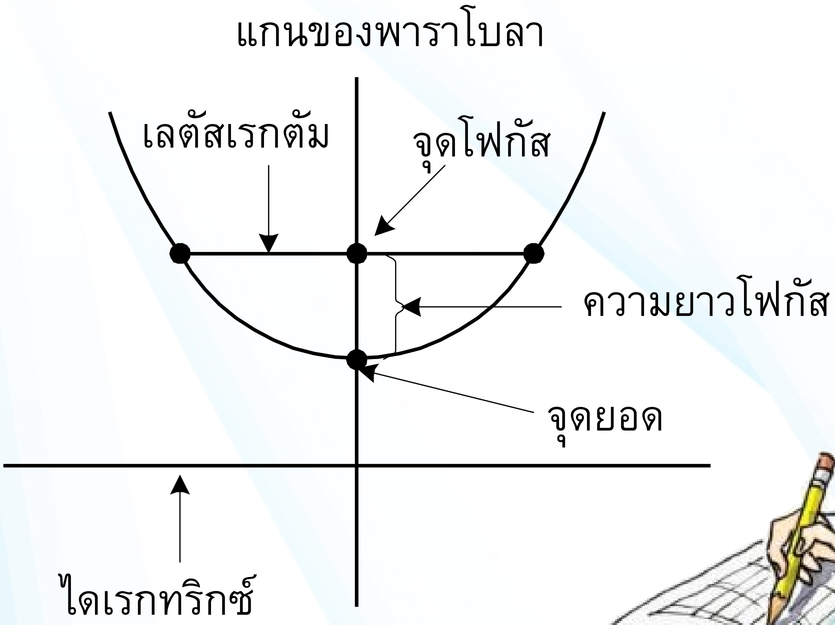
พาราโบลา (Parabola) คือ เซตหรือทางเดินของจุด ซึ่งแต่ละจุดจะมีระยะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่ง และเส้นตรงคงที่อีกเส้นหนึ่งเป็นความยาวที่เท่ากัน จุดคงที่นี้เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus) เส้นตรงคงที่เรียกว่า เส้นไดเรกทริกซ์ (Directrix)

พาราโบลานอกจากจะมีส่วนประกอบ คือ จุดโฟกัส และเส้นไดเรกทริกซ์แล้ว ยังมีส่วนประกอบอื่น ๆ ที่สำคัญ ดังนี้

จุดยอด (Vertex) คือ จุดบนพาราโบลาที่อยู่ใกล้จุดโฟกัสมากที่สุด

แกนของพาราโบลา (Axis) คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและจุดยอด

เลตัสเรกตัม (Latus Rectum) คือ เส้นตรงที่ลากต่อจุดบนพาราโบลาสองจุด ผ่านจุดโฟกัสและขนานกับไดเรกทริกซ์

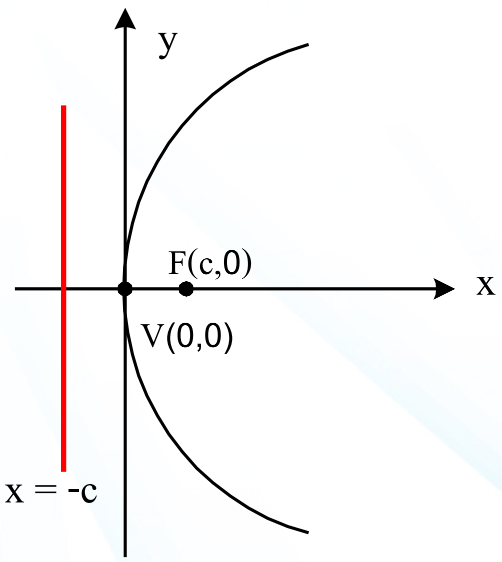


พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

ในขั้นแรกนี้จะเริ่มศึกษาพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด จุดโฟกัสอยู่บนแกน x หรือแกน y

พาราโบลามี 4 แบบ คือ

แบบที่ 1 พาราโบลาเปิดด้านขวา ดังรูป



จุดยอด คือ V (0, 0)

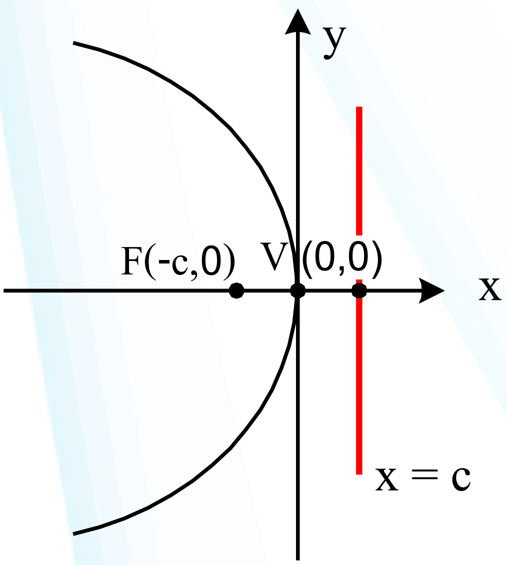
จุดโฟกัส คือ F (c, 0)

ไดเรกทริกซ์ คือ x = -c

แกนพาราโบลา คือ แกน x

ความยาวโฟกัส คือ |c| = c

แบบที่ 2 พาราโบลาเปิดด้านซ้าย ดังรูป



จุดยอด คือ V (0, 0)

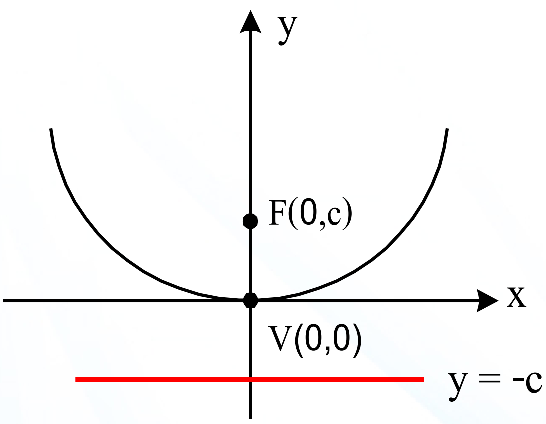
จุดโฟกัส คือ F (-c, 0)

ไดเรกทริกซ์ คือ x = c

แกนพาราโบลา คือ แกน x

ความยาวโฟกัส คือ |-c| = c

แบบที่ 3 พาราโบลาเปิดด้านบน ดังรูป



จุดยอด คือ V (0, 0)

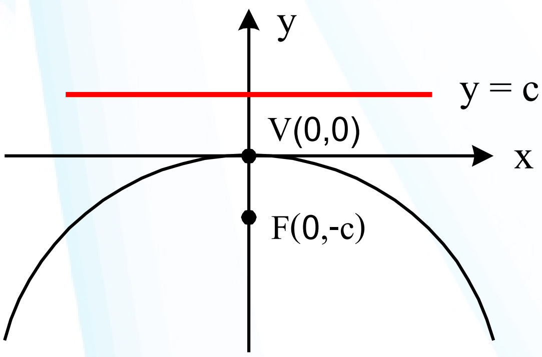
จุดโฟกัส คือ F (0, c)

ไดเรกทริกซ์ คือ y = -c

แกนพาราโบลา คือ แกน y

ความยาวโฟกัส คือ |c| = c

แบบที่ 4 พาราโบลาเปิดด้านล่าง ดังรูป



จุดยอด คือ V (0, 0)

จุดโฟกัส คือ F (0, -c)

ไดเรกทริกซ์ คือ y = c

แกนพาราโบลา คือ แกน y

ความยาวโฟกัส คือ |-c| = c

สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่จุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด

สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านขวา (แบบที่ 1) คือ

$y^2 = 4cx$ เมื่อ $c > 0$

หรือ $y^2 = 4|c|x$

สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านซ้าย (แบบที่ 2) คือ

$y^2 = -4|c|x$

สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านบน (แบบที่ 3) คือ

$x^2 = 4|c|y$

สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านล่าง (แบบที่ 4) คือ

$x^2 = -4|c|y$

ทฤษฎีบทที่ 1

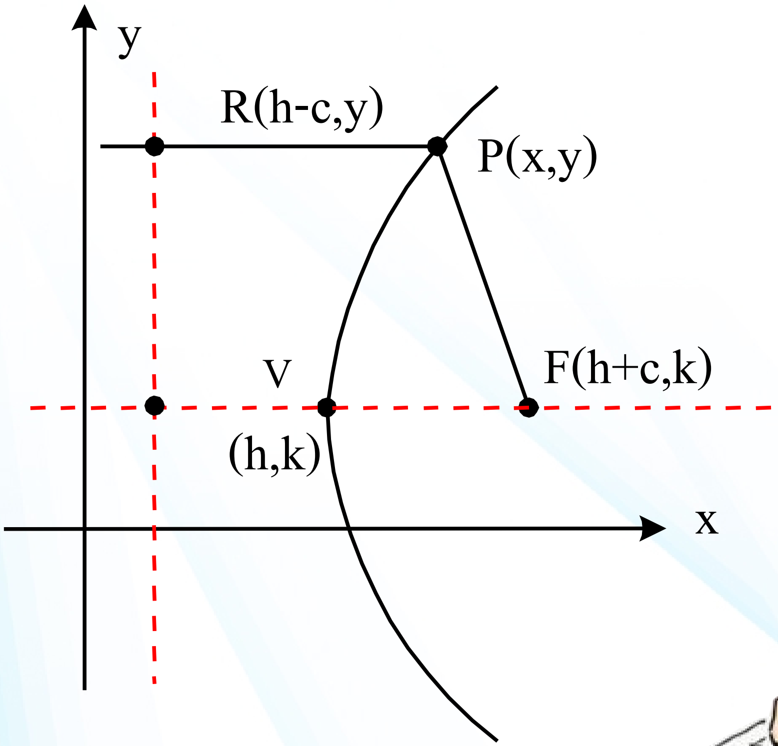
ความยาวของเลตัสเรกตัม (Latus Rectum) เท่ากับ $|4c|$ หน่วย เมื่อ c คือความยาวโฟกัส

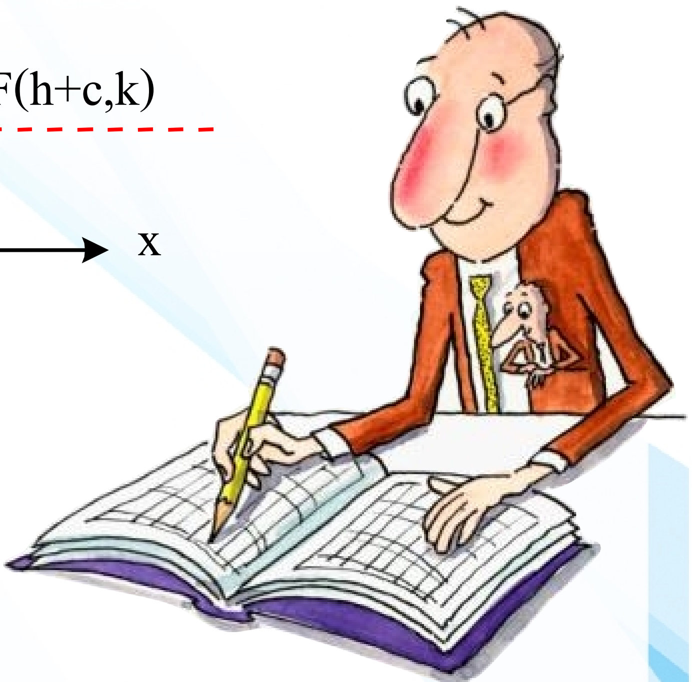
การเขียนกราฟโดยใช้เลตัสเรกตัม มีขั้นตอนดังนี้

1. เขียนระบบพิกัดฉาก
2. กำหนดจุดยอดและจุดโฟกัสของพาราโบลา
3. ลากเส้นเลตัสเรกตัม (เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสและตั้งฉากกับแกนพาราโบลา มีความยาวเท่ากับ 4c หน่วย)
4. เขียนกราฟของพาราโบลา โดยลากเส้นโค้งจากจุดยอดให้ผ่านปลายทั้งสองของเส้นเลตัสเรกตัม

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k)

พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) ก็มี 4 แบบ เช่นเดียวกับพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด





ไดเรกทริกซ์ ; $x = h - c$

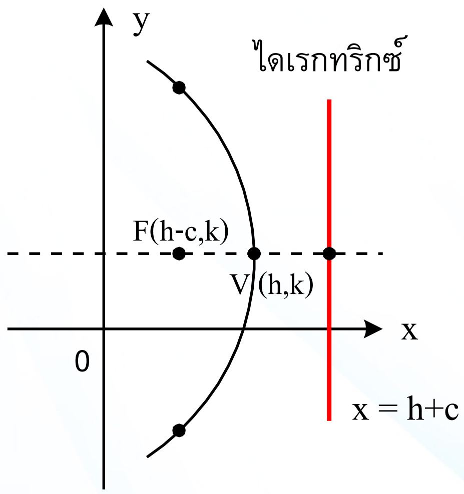
สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านขวา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) คือ

$$(y - k)^2 = 4c(x - h) \quad \text{เมื่อ } c > 0$$

หรือ

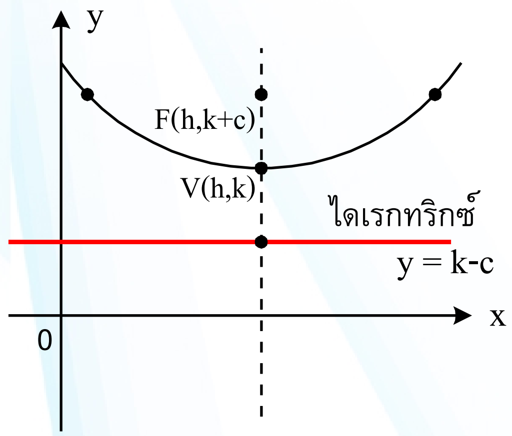
$$(y - k)^2 = 4|c|(x - h)$$

ในทำนองเดียวกันอาจแสดงได้ว่า



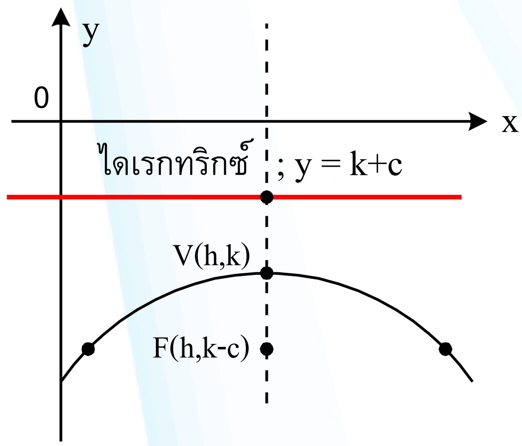
สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านซ้ายที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) คือ

$$(y-k)^2 = -4|c|(x-h)$$



สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านบนที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) คือ

$$(x-h)^2 = 4|c|(y-k)$$



สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาเปิดด้านล่างที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) คือ

$$(x-h)^2 = -4|c|(y-k)$$

วงรี (Ellipse)

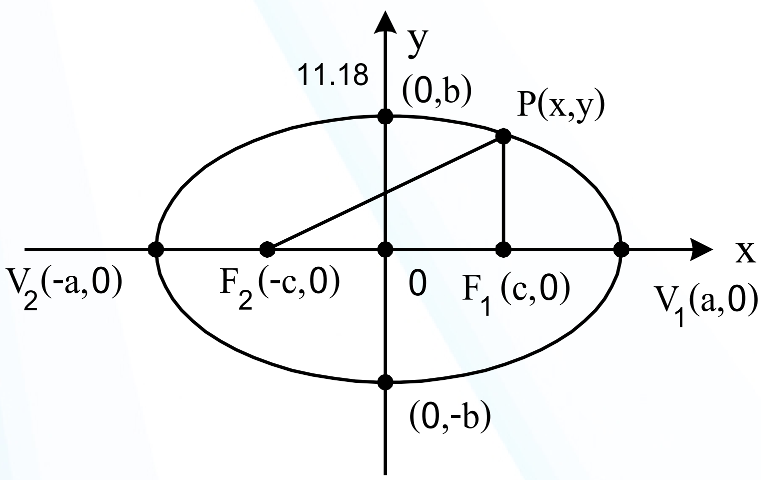
นิยามที่ 4

วงรี (Ellipse) คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลบวกของระยะทางจากจุดบนวงรีไปยังจุดคงที่ (Fixed Point) 2 จุด เป็นค่าคงตัวจุด 2 จุดนี้เรียกว่า จุดโฟกัส (Focus)

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด จะมีอยู่ 2 แบบ คือ

1. วงรีที่มีแกนหลักอยู่บนแกน x



จากรูป

จุดยอด คือ $V_1(a, 0)$ และ $V_2(-a, 0)$

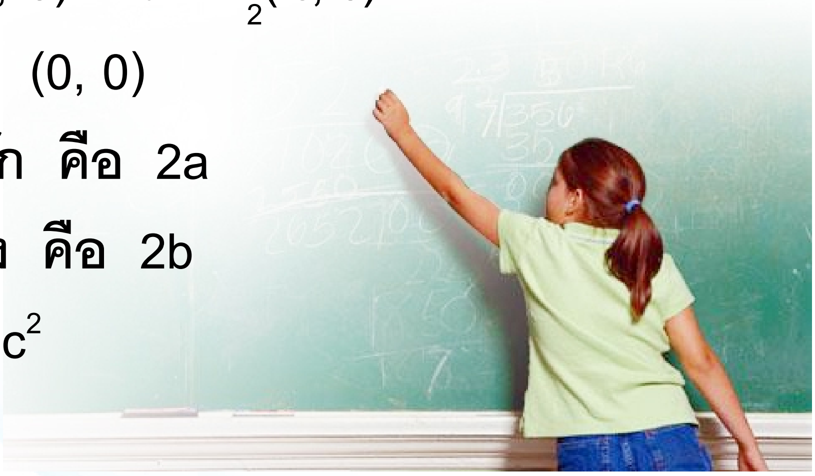
จุดโฟกัส คือ $F_1(c, 0)$ และ $F_2(-c, 0)$

จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

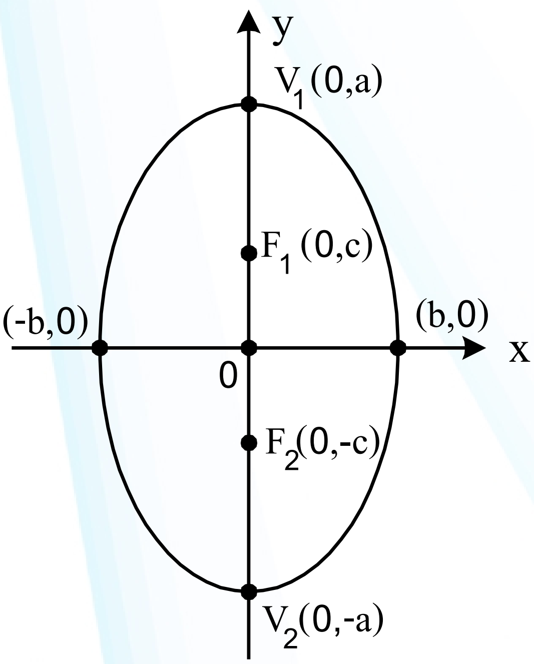
ความยาวแกนหลัก คือ $2a$

ความยาวแกนรอง คือ $2b$

และ $a^2 = b^2 + c^2$



2. วงรีที่มีแกนหลักอยู่บนแกน y



จากรูป

จุดยอด คือ $V_1(0, a)$ และ $V_2(0, -a)$

จุดโฟกัส คือ $F_1(0, c)$ และ $F_2(0, -c)$

จุดศูนย์กลาง คือ $(0, 0)$

ความยาวแกนหลัก คือ $2a$

ความยาวแกนรอง คือ $2b$

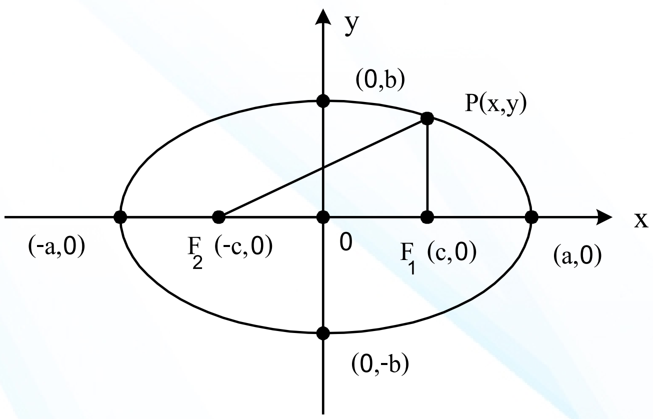
และ $a^2 = b^2 + c^2$

สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

(1) **วงรีที่มีแกนหลักอยู่บนแกน x จะมีสมการรูปมาตรฐาน คือ**

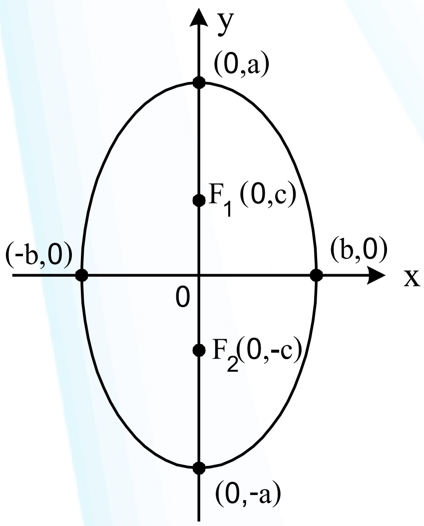
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ซึ่งมีที่มาดังนี้



(2) **วงรีที่มีแกนหลักอยู่บนแกน y จะมีสมการรูปมาตรฐาน คือ**

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



ซึ่งสมการนี้ มีที่มาทำนองเดียวกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่แกนหลักอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ค่าเอ็คเซนตริกซิตี้ (Eccentricity) หรือความเยื้องจุดศูนย์กลางของวงรี

เป็นค่าที่มีความสัมพันธ์กับลักษณะของวงรี ซึ่งแทนด้วย e และ

$$e = \frac{c}{a} \qquad \text{เมื่อ} \qquad 0 < e < 1$$

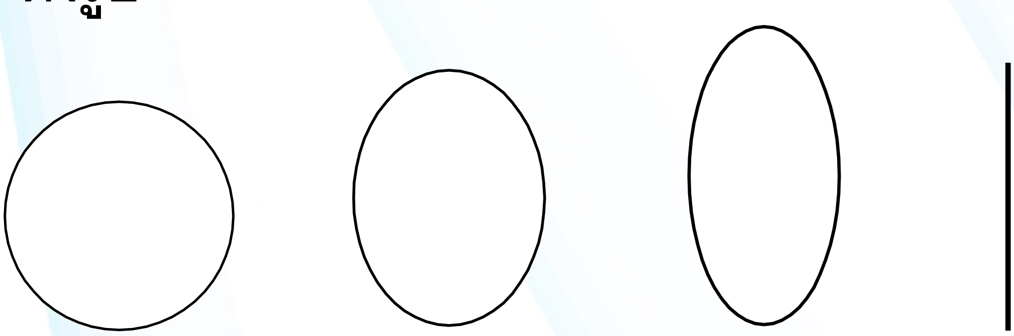
ถ้า e มีค่าเข้าใกล้ 0 รูปวงรีจะมีรูปลักษณะเกือบเป็นวงกลม

ถ้า e มีค่าเข้าใกล้ 1 รูปวงรีจะมีรูปลักษณะเกือบเป็นเส้นตรง

และ ถ้า e = 0 จะได้เป็นรูปวงกลม

ถ้า e = 1 จะได้เป็นเส้นตรง

ดังรูป

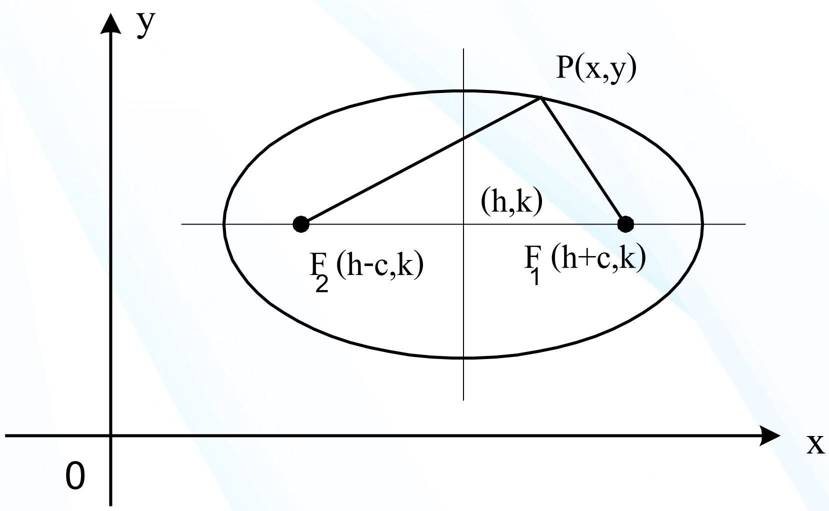


e = 0 e = 0.20 e = 0.80 e = 1

วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

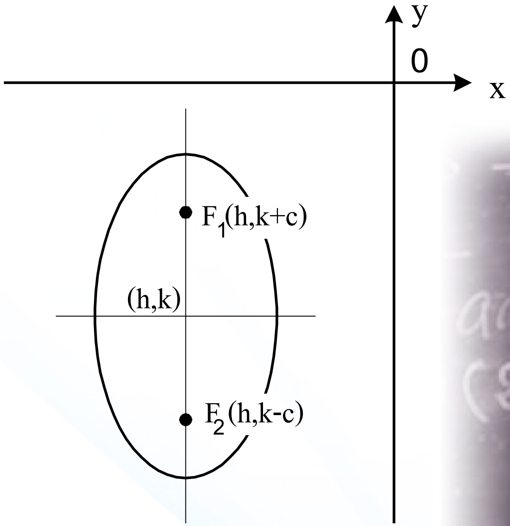
(1) วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และมีแกนหลักขนานกับแกน x



มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

(2) วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และมีแกนหลักขนานกับแกน y



มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

นิยามที่ 5

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือ เซตหรือทางเดินของจุดที่มีผลต่างของระยะ จากจุดบนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่สองจุดเป็นค่าคงตัว จุดคงที่สองจุดนี้ **เรียกว่า** จุดโฟกัส (Focus)

นอกจากจุดโฟกัสแล้ว ไฮเพอร์โบลายังมีส่วนประกอบอื่น ๆ ที่สำคัญ ดังนี้

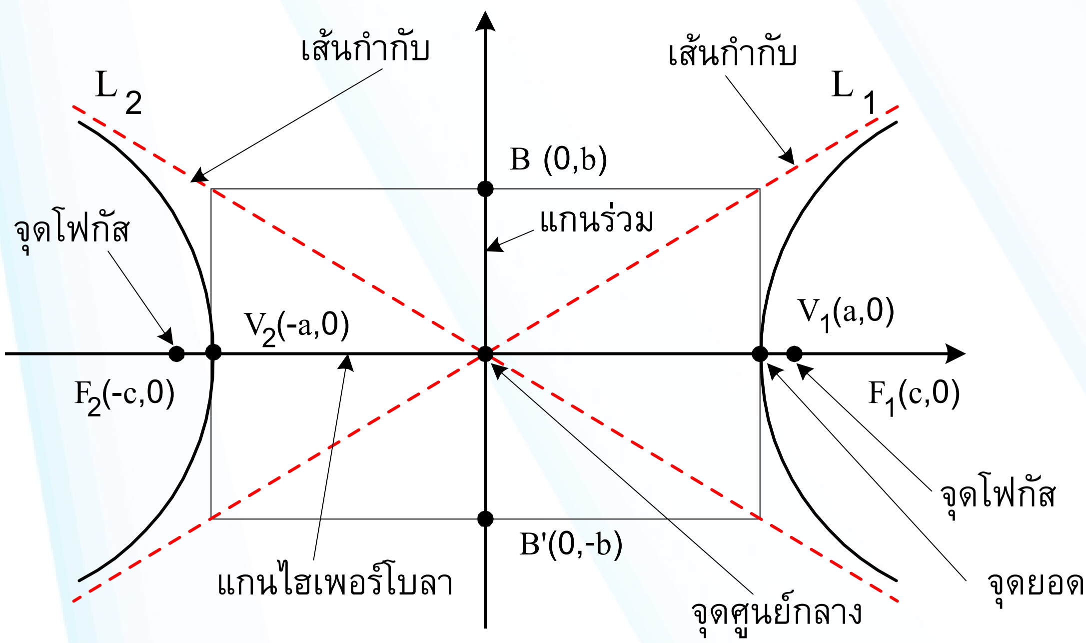
แกนของไฮเพอร์โบลา (Axis of Hyperbola) คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัสทั้งสอง

แกนร่วม (Conjugate Axis) คือ เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนของไฮเพอร์โบลา

จุดยอด (Vertex) ของไฮเพอร์โบลา คือ จุดที่ไฮเพอร์โบลาตัดกับแกนของไฮเพอร์โบลา

จุดศูนย์กลาง (Center) ของไฮเพอร์โบลา คือ จุดที่แกนของไฮเพอร์โบลาตัดกับแกนร่วม

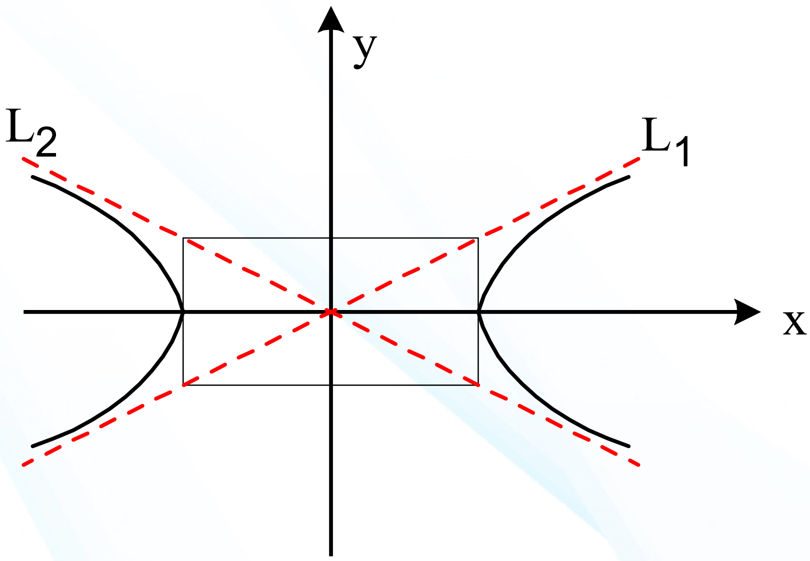
เส้นกำกับ (Asymptote) ของไฮเพอร์โบลา คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา แต่จะไม่ตัดกับเส้นโค้งของไฮเพอร์โบลา



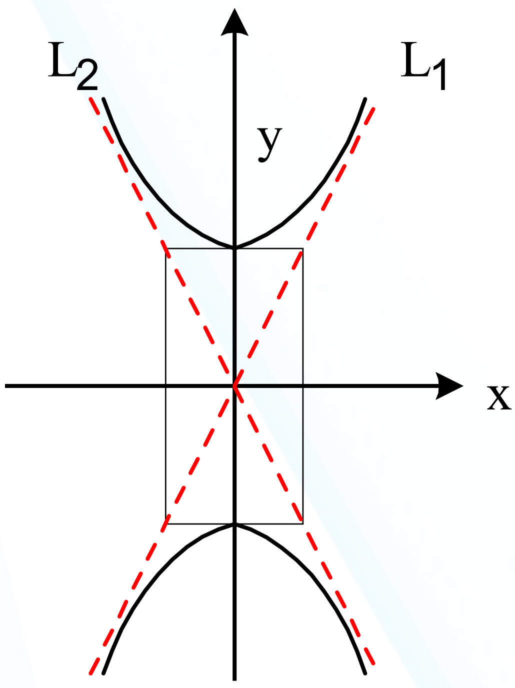
ไฮเพอร์โบลาที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีอยู่ 2 แบบ คือ

(1) ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน x



(2) ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน y

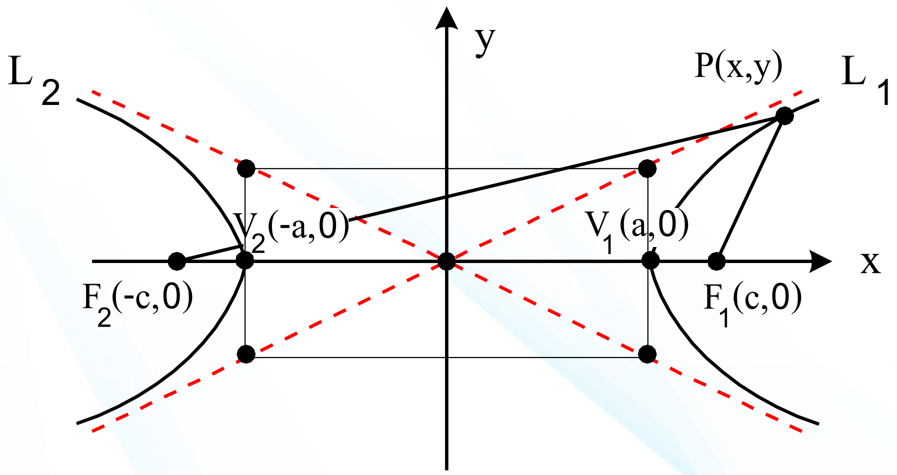


สมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0)

(1) **ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน x** มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

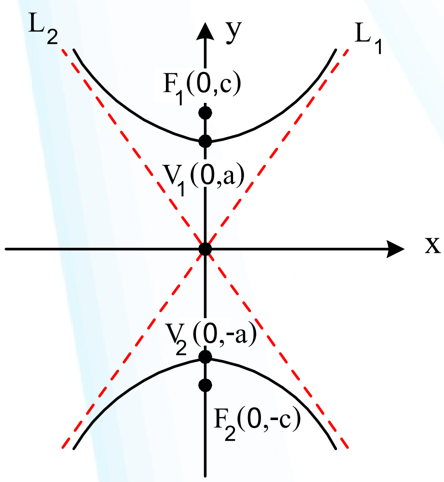
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ซึ่งมีที่มาดังนี้



(2) **ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนอยู่บนแกน y** มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



เส้นกำกับทั้งสอง ได้แก่

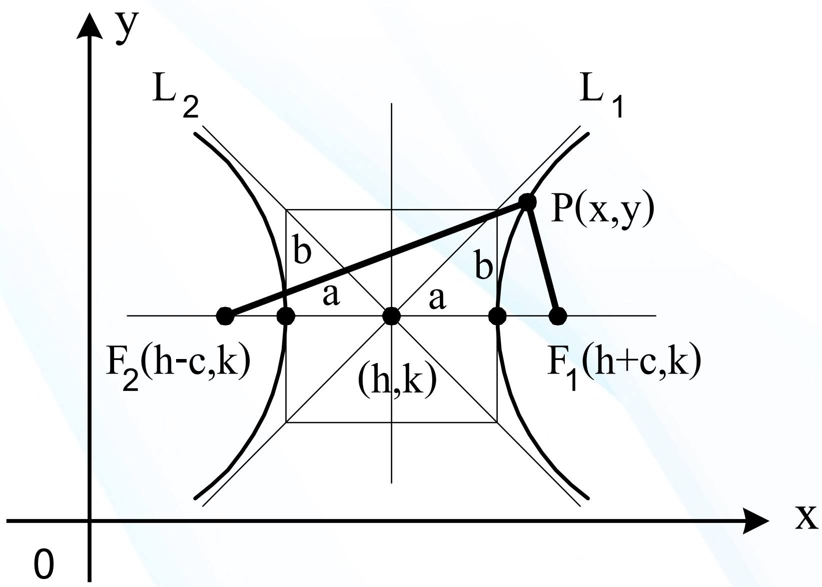
$y = \frac{a}{b}x$ **และ** $y = -\frac{a}{b}x$

ซึ่งสมการนี้ มีที่มาทำนองเดียวกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ที่แกนอยู่บนแกน x และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k)

(1) **ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนขนานกับแกน x** มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \textbf{เมื่อ} \quad a^2 + b^2 = c^2$$



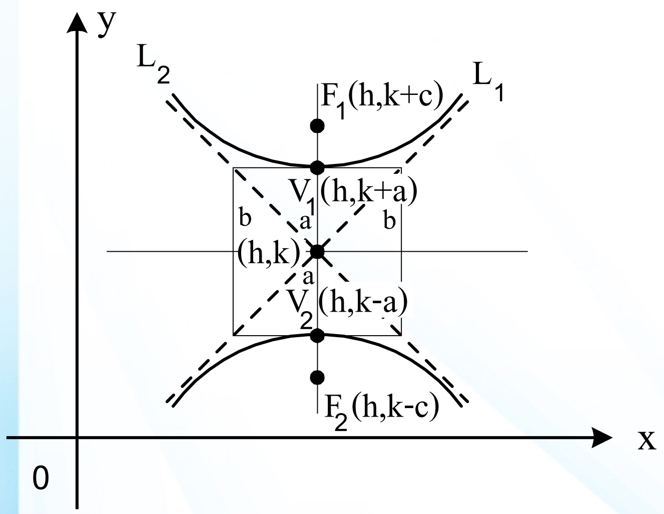
สมการของเส้นกำกับหาได้จาก $y - y_1 = m(x - x_1)$

นั่นคือ สมการเส้นกำกับ L_1 **คือ** $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$

และ สมการเส้นกำกับ L_2 **คือ** $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$

(2) **ไฮเพอร์โบลาที่มีแกนขนานกับแกน y** มีสมการรูปมาตรฐาน คือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



เมื่อ $b^2 = c^2 - a^2$

สมการเส้นกำกับ L_1 **คือ**

$$y-k = \frac{a}{b}(x-h)$$

สมการเส้นกำกับ L_2 **คือ**

$$y-k = -\frac{a}{b}(x-h)$$

สมการรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบลา

สมการรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบลาที่แกนขนานกับแกน x คือ

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

สมการรูปทั่วไปของไฮเพอร์โบลาที่แกนขนานกับแกน y คือ

$$Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$$