หน่วยที่ 1 การวิเคราะห์เวกเตอร์

บทที่ 1.1 สเกลาร์และเวกเตอร์

1.1.1 ความหมายและสัญญลักษณ์

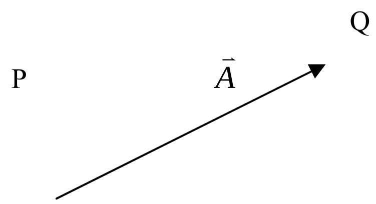
เวคเตอร์และสเกลาร์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการอธิบายแนวความคิดเกี่ยวกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

สเกลาร์(Scalar) มีขนาดเพียงอย่างเดียวเท่านั้นเช่น เวลา มวล ระยะทาง อุณหภูมิ ศักย์ไฟฟ้า ประชากร เป็นต้น

เวกเตอร์(Vector) มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ความเร็ว แรง ความเข้มสนามไฟฟ้า เป็นต้น

สัญญลักษณ์แทนเวกเตอร์ มีหลายแบบ แต่โดยทั่วไปใช้อักษรที่มีลูกศรกำกับอยู่ข้างบนเป็นสัญญลักษณ์แทนเวกเตอร์ เช่น $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \ldots$,หรือ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}, \ldots$,ส่วนขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วยตัวอักษร ที่ไม่มีลูกศรกำกับ หรือค่าสัมบูรณ์ของเวกเตอร์ เช่น A,B,C,…,หรือ AB, PQ,…หรือ $|\vec{A}|, |\vec{B}|, |\vec{C}|, \ldots, |\overline{AB}|, |\overline{PQ}|, \ldots\ldots$

ภาพแทนเวกเตอร์ ต้องแทนได้ทั้งขนาดและทิศทาง จึงใช้ส่วนของเส้นตรงระบุทิศทาง หรือ ลูกศรเป็นภาพแทนเวกเตอร์ ดังรูป โดยความยาวของส่วนเส้นตรง หรือ ลูกศร แสดงขนาดของเวกเตอร์(อาจอยู่ในรูปอัตราส่วน) และทิศทาง P ไป Q หรือทิศทางที่ลูกศรชี้แสดงทิศทางของเวกเตอร์



1.1.2 คุณสมบัติเบื้องต้นของเวกเตอร์

1. การเท่ากัน เวกเตอร์ที่เท่ากันหมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน และมีทิศไปทางเดียวกัน ดังรูป

2.เวกเตอร์นิเสธ เวกเตอร์นิเสธของเวกเตอร์ใดหมายถึงเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์นั้น แต่มีทิศตรงกันข้าม ดังรูป

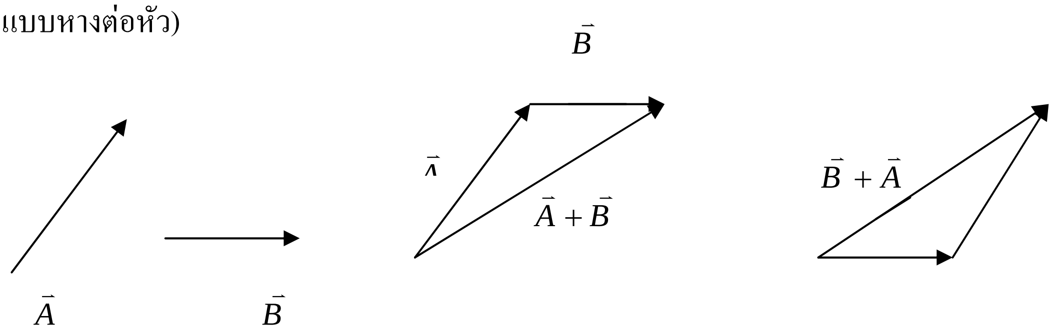
3. เวกเตอร์ศูนย์ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเป็น ศูนย์ และมีทิศทางไปทางใดก็ได้(อิสระ) ใช้สัญญลักษณ์ $\vec{O}$ หรือ 0 แทน ส่วนภาพแทนเวกเตอร์ศูนย์ จะเป็นจุด เพราะจุดต้นกับจุดปลายของลูกศรแทนเวกเตอร์อยู่ที่เดียวกัน

4. เวกเตอร์หน่วย เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย โดยเวกเตอร์หน่วยของเวกเตอร์ใด จะมีทิศเดียวกับเวกเตอร์นั้น สัญญลักษณ์แทนเวกเตอร์หน่วยนั้นใช้ตัวอักษร ตัวพิมพ์เล็กที่มีหมวก " $\rightarrow$ " กำกับเช่น $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$,.....ดังนั้นในกรณีที่ $\vec{A}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ เวกเตอร์หน่วยของ $\vec{A}$ คือ

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}$$

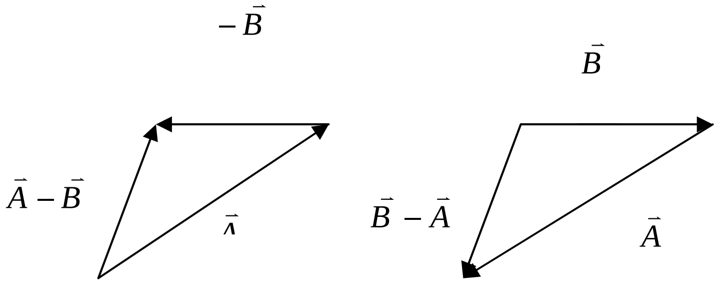
1.1.3 พีชคณิตทางเวกเตอร์

-การบวก ต้องคิดทั้งขนาดและทิศทางไปพร้อมๆกัน ดังแสดงในรูป (เขียนเวกเตอร์แบบหางต่อหัว)



-การลบ เป็นการบวกด้วยเวกเตอร์นิเสธของเวกเตอร์ที่เป็นตัวลบ

เช่น $\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$

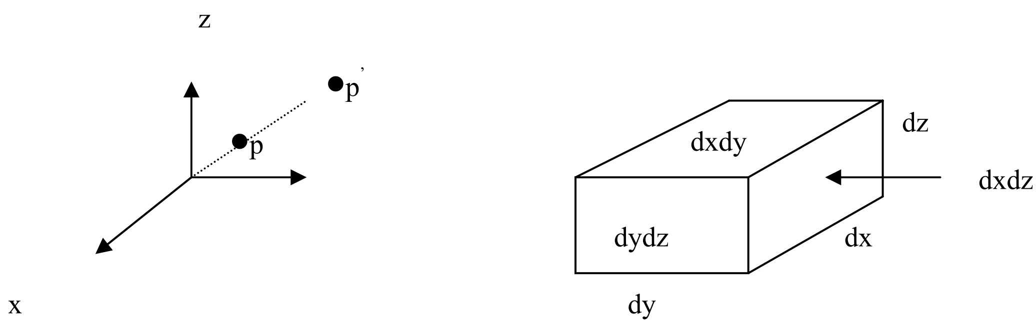


พีชคณิตเวกเตอร์

กฎการสลับที่ (Commutative law) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

กฎการจัดหมู่(Associative law) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$

1.1.4 ระบบพิกัดฉาก (The cartesian coordinte system)



ระบบพิกัดฉาก แสดงดังรูปซึ่งจะได้

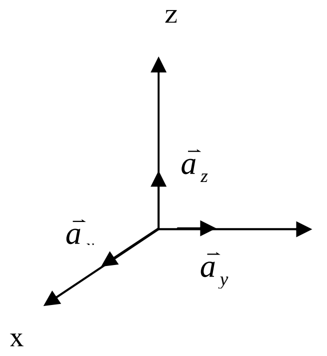
1. ระยะทางดิฟเฟอร์เรนเชียลตามแนวแกน (dL) คือ dx , dy และ dz
2. พื้นที่ดิฟเฟอร์เรนเชียล (ds) คือdx dy , dy dz และ dz dx
3. ปริมาตรดิฟเฟอร์เรนเชียล (dv) คือdx dy dz

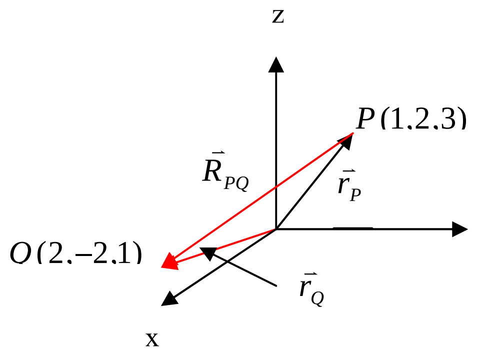
และระยะทางดิฟเฟอเรนเชียล (dL) จากจุด P ไปยังจุด P' หาได้จาก

dL = $\sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector) หมายถึงปริมาณเวคเตอร์ใดๆ ที่มีขนาดเท่ากับหนึ่ง เช่น ax,ay,az เป็นเวคเตอร์หนึ่งหน่วยของระบบเวคเตอร์ 3 มิติ ที่มีทิศทางไปตามแกน X,Y และ Z ตามลำดับในระบบพิกัดฉาก

ดังเช่นในรูป เวคเตอร์ $\vec{r}_p$ ชี้ จากจุด Origin ถึงจุด P(1,2,3) เขียนได้ว่า $\vec{r}_p = \vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$





เวคเตอร์กระจัด เวคเตอร์จากจุด P ถึงจุด Q ดังรูปข้างบน หาได้ด้วยการใช้กฎของการบวกเวคเตอร์ ซึ่งแสดงว่าเวคเตอร์จากจุด Origin ถึงจุด P บวกกับเวคเตอร์จากจุด Pถึงจุด Q เท่ากับเวคเตอร์จากจุด Origin ถึงจุด Q

เวคเตอร์ที่ต้องการหาจากจุด P (1,2,3) ถึง Q (2,-2,1) หาได้ดังนี้

$$\vec{R}pq = \vec{r}_q - \vec{r}_p = (2\text{-}1)\vec{a}_x + (\text{-}2\text{-}2)\vec{a}_y + (1\text{-}3)\vec{a}_z$$

$$= \vec{a}_x - 4\vec{a}_y - 2\vec{a}_z$$

ระยะทาง PQ ก็คือขนาด ของเวกเตอร์ $\vec{R}_{PQ}$ นั่นเอง

เพราะฉะนั้น PQ = $\left|\vec{R}_{PQ}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-2)^2}$

$$= \sqrt{21}$$

ส่วนประกอบทางสเกลาร์: ส่วนประกอบทางสเกลาร์ของเวคเตอร์ใดๆ เรียกสั้นๆว่าส่วนประกอบ ตัวอย่างเช่น Fx,Fy และ Fz ส่วนประกอบนี้ คือ สิ่งที่แทนขนาดของส่วนประกอบของเวคเตอร์ เขียนในรูปเวคเตอร์ได้ดังนี้ $\vec{F} = Fx\vec{a}_x + Fy\vec{a}_y + Fz\vec{a}_z$

สำหรับเทมอต่างๆ คือ $Fx\vec{a}_x$, $Fy\vec{a}_y$ และ $Fz\vec{a}_z$ เรียกว่าส่วนประกอบของเวคเตอร์ $\vec{F}$ (Vector Compoment) ค่า Fx,Fy,Fz เป็นขนาดของ $\vec{F}$ ในทิศทาง $\vec{a}_x$,$\vec{a}_y$ และ$\vec{a}_z$ ตามลำดับ ค่า Fx,Fy,Fz เป็นปริมาณสเกลาร์ สำหรับเวคเตอร์ $\vec{B}$ ใดๆ จะได้

$$\vec{B} = \mathrm{Bx}\vec{a}_x + \mathrm{By}\vec{a}_y + \mathrm{Bz}\vec{a}_z$$

หาขนาดของเวคเตอร์ได้ดังนี้

$$|B| = \sqrt{Bx^2 + By^2 + Bz^2}$$

ถ้ากำหนด $\vec{a}_B$ = ยูนิตเวตเตอร์ที่อยู่ในทิศทาง ก็จะได้ว่า

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{B}}{\sqrt{Bx^2 + By^2 + Bz^2}}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเวกเตอร์ที่เกิดขึ้นระหว่างจุดสองจุด

1.1 จากจุด Origin ถึงจุด B(-1,-5,2) และหาระยะทาง OB

1.2 จากจุด B(-1,-5,2) ถึง C (3,-5,2) และหาระยะทาง BC

วิธีทำ (1.1) สมมุติเป็นเวกเตอร์ $\vec{A}$ เพราะฉะนั้นจะได้สมการของ $\vec{A}$ คือ

$\vec{A}$ = B(-1,-5,2)-O(0,0,0)

$\vec{A}$ =(-1-0)$\vec{a}x$ +(-5-0)$\vec{a}y$ +(2-0)$\vec{a}z$

$\vec{A}$ = -$\vec{a}x - 5\vec{a}y + 2\vec{a}z$ **ตอบ**

ระยะทาง OB ก็คือขนาดของเวคเตอร์ $\vec{A}$

$\therefore$ OB = $|\vec{A}| = \sqrt{Ax^2 + Ay^2 + Ay^2}$

$\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{1 + 25 + 4}$

$= \sqrt{30}$ หน่วย

(1.2) สมมุติให้เป็นเวกเตอร์ $\vec{E}$ เพราะฉะนั้นจะได้สมการของ $\vec{E}$ ดังนี้

$\vec{E}$ = C(3,-5,2)-B(-1,-5,2)

$\vec{E}$ = (3+1)$\vec{a}_x$ +(5-5)$\vec{a}_y$ +(2-2)$\vec{a}_z$

$\vec{E}$ =4$\vec{a}_x$

ระยะทาง BC ก็คือขนาดของ $\vec{E}$

เพราะฉะนั้น BC = $|\vec{E}| = \sqrt{Ex^2 + Ey^2 + Ez^2}$

$= \sqrt{(4)^2} = \sqrt{16}$ = 4 หน่วย

ตัวอย่างที่2 กำหนดจุด 3จุด พร้อมพิกัดคือ A(2,-3,1),B(-4,-2,6) C(1,5,-3) จงหา

ก) เวกเตอร์ที่มีทิศจาก A ไป C

ข) เวกเตอร์ หน่วยที่มีทิศจาก B ไป A

ค) ระยะจาก B ไป C

ง) เวกเตอร์จาก A ไปจุดยังกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อต่อระหว่าง จุด B กับ C

วิธีทำ ก) เวกเตอร์ที่มีทิศจาก A ไป C คือ $\left|\overrightarrow{AC}\right|$=(1-2)$\vec{a}_x$ +(5+3)$\vec{a}_y$ +(-3-1)$\vec{a}_z$

=-$\vec{a}_x$ +8$\vec{a}_y$ -4$\vec{a}_z$ **ตอบ**

ข) วกเตอร์ หน่วยที่มีทิศจาก B ไป A คือ$\vec{a}_{BA}$

$$\therefore\ \vec{a}_{BA} = \frac{\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|}\ ;\ \overrightarrow{BA} = \mathbf{(2+4)}\vec{a}_z + (-2+3)\ \vec{a}_y + (1-6)\ \vec{a}_z$$

$$= \mathbf{6}\vec{a}_x - \vec{a}_y - 5\vec{a}_z$$

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-5)^2} = \sqrt{62}$$

$$\therefore\ \vec{a}_{BA} = \frac{6\vec{a}_x - \vec{a}_y - 5\vec{a}_z}{\sqrt{62}}$$ **ตอบ**

ค) ระยะจาก B ไป C คือ $\left|\overrightarrow{BC}\right| = BC$

$$\overrightarrow{BC} = \mathbf{(1\text{-}(\text{-}4))}\vec{a}_z + (5-(-2))\ \vec{a}_y + (-3-6))\ \vec{a}_z$$

$$= \mathbf{5}\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 9\vec{a}_z$$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{25 + 49 + 81} = \sqrt{155}$ = 12.45 หน่วย **ตอบ**

ง) จุดกึ่งกลางระหว่าง B กับC ให้เป็น จุด m

$$\therefore\ \mathbf{m} = 1/2\{(-4+1), (-2+5) + (6-3)\}$$

= (-1.5,1.5,1.5)

$$\therefore\ A\vec{m} = \mathbf{(-1.5\text{-}2)}\vec{a}_z + (1.5-(-3))\ \vec{a}_y + (1.5-1)\ \vec{a}_z$$

$$= -3.\mathbf{5}\vec{a}_x + 4.5\vec{a}_y + 0.5\vec{a}_z$$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางจาก Origin ไปสู่จุด G(2,-2,1)

วิธีทำ จะได้ G = **2**$\vec{a}_x$ -2$\vec{a}_y$ -$\vec{a}_z$

หาขนาดของ G ; $\left|\vec{G}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\therefore\ \vec{a}_G = \frac{\vec{G}}{\left|\vec{G}\right|} = 1/3\left(2\vec{a}x - 2\vec{a}y - \vec{a}z\right) = \mathbf{(2/3)}\vec{a}_x - (2/3)\vec{a}_y - (1/3)\vec{a}_z$$ **ตอบ**

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1.1

1. จงหาทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A}$ จาก(2,-4,1) ถึง (0,-2,0) ในพิกัดฉาก และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง A **คำตอบ** $-\frac{2}{3}\vec{a}_x + \frac{2}{3}\vec{a}_y - \frac{1}{3}\vec{a}_z$

2. กำหนดเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\vec{r}_A = -\vec{a}_x - 3\vec{a}_y - 4\vec{a}_z$ และ $\vec{r}_B = 2\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$ และจุด C(1,3,4) จงหา (ก) $\vec{R}_{AB}$ (ข) $\left|\vec{r}_A\right|$ (ค) $\vec{a}_A$ (ง) $\vec{a}_{AB}$

(จ) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ชี้จากจุด C สู่จุด A

คำตอบ $3\vec{a}_x + 5\vec{a}_y + 6\vec{a}_z$; 5.10;

$-0.196\vec{a}_x - 0.588\vec{a}_y - 0.784\vec{a}_z$; $0.359\vec{a}_x + 0.598\vec{a}_y + 0.717\vec{a}_z$;

$-0.196\vec{a}_x - 0.588\vec{a}_y - 0.784\vec{a}_z$

3. กำหนดสนามเวกเตอร์ $\vec{F} = 0.4(Y - 2X)\vec{a}_x - \left[200/(x^2 + y^2 + z^2)\right]\vec{a}_z$ จงหา

(ก) $\left|\vec{F}\right|$ ที่จุด P(-4,3,5) (ข) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่กำหนดทิศทางของ $\vec{F}$ ที่ P

คำตอบ 5.95 ; $0.74\vec{a}_x - 0.673\vec{a}_z$

4. รูปสามเหลี่ยมหนึ่ง กำหนดด้วยจุด 3 จุด คือ A(2,-5,1),B(-3,2,4) และ C(0,3,1) จงหา

(ก) $\vec{R}_{BC} \times \vec{R}_{BA}$ (ข) พื้นที่สามเหลี่ยมนี้ (ค) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับระนาบนี้ในที่ซึ่งสามเหลี่ยมนี้วางอยู่ **คำตอบ** $-24\vec{a}_x - 6\vec{a}_y - 26\vec{a}_z$,17.94,

+/-($0.669\vec{a}_x + 0.167\vec{a}_y + 0.724\vec{a}_z$)

5. ถ้า $\vec{A} = 3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 2\vec{a}_z$; $\vec{B} = -\vec{a}_x + \vec{a}_y$ จงหา

(ก) $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$ (ข) $2\vec{A} + 3\vec{B}$

คำตอบ $2\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z$ และ $4\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + \vec{a}_z$; $3\vec{a}_x + 8\vec{a}_y + 7\vec{a}_z$